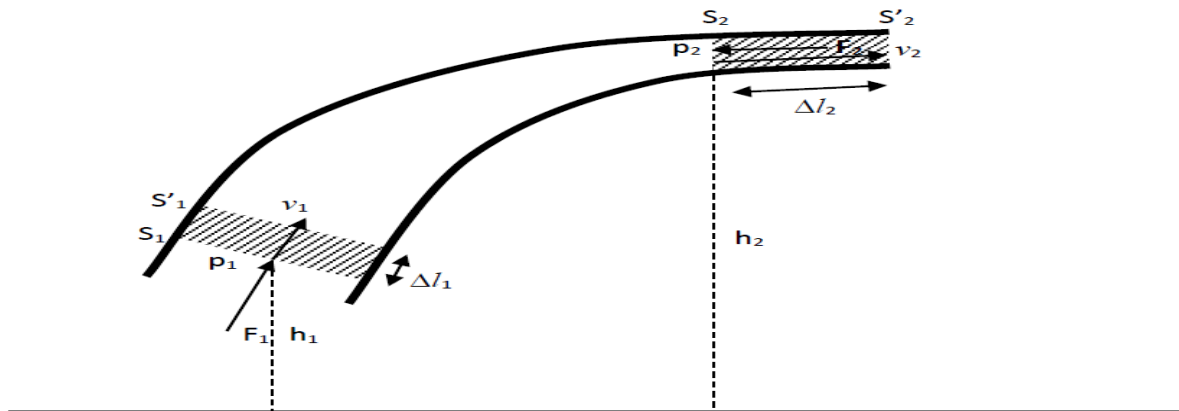


- ◉ **Bernulijeva jednačina**
- ◉ Bernulijeva jednačina izražava zakon o održanju energije, jer ona pokazuje da je zbir potencijalne i kinetičke energije na jedinicu težine tečnosti konstantan duž strujnice idealne tečnosti.
- ◉ Postoji više oblika Bernulijve jednačine koje opisuju razne vrste protoka fluida. Najjednostavniji oblik Bernulijve jednačine se odnosi na slučaj kada se gustina fluida može uzeti kao nepromenljiva (kod tečnosti i kod zanemarivanja stišljivosti gasa na malim brzinama).

- Ako je fluid nestišljiv i bez unutrašnjeg trenja:
 - Proticanje fluida kroz uzani kanal strujanje se ubrzava,
 - Menja se kinetička energija,
 - Promena energije je posledica izvršenog rada spoljašnjih sila F_1 i F_2 koje su posledica pritiska koji deluje na preseke S_1 i S_2 ,
 - Sile pritiska su različitih smerova pa radovi imaju različite znakove.



⊙ Bernulijeva jednačina glasi

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = \text{const}$$

⊙ gde je

⊙ p – statički pritisak

⊙ $\frac{\rho v^2}{2}$ - dinamički pritisak

⊙ 2

▪ ρgh - hidrostatički pritisak

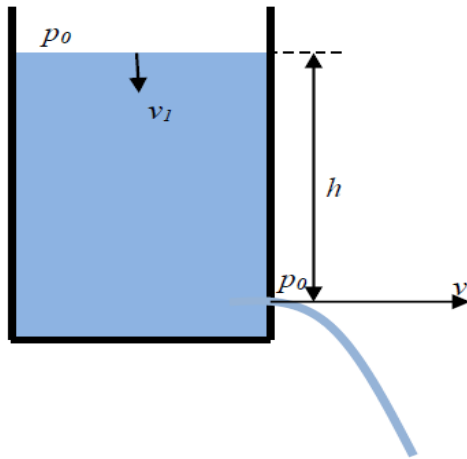
- Pri stacionarnom proticanju idealnog fluida kroz strujnu cev zbir statičkog, dinamičkog pritiska i hidrostatičkog ostaje konstantan.
- Bernulijeva jednačina važi za uske strujne cevi, pa se u tom slučaju može smatrati da brzine v_1 i v_2 i visine h_1 i h_2 odgovaraju tačkama koje se nalaze na istoj strujnoj liniji.

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2$$

- Kada je cev horizontalna

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}$$

- ◉ TORIČELIJEVA TEOREMA (ISTICANJE TEČNOSTI)
- ◉ Primenom Bernulijeva jednačine može da se odredi brzina isticanja tečnosti kroz otvor koji se nalazi na bočnom zidu ili na dnu posude.
- ◉ Posmatramo posudu sa vrlo malim otvorom kroz koji ističe tečr



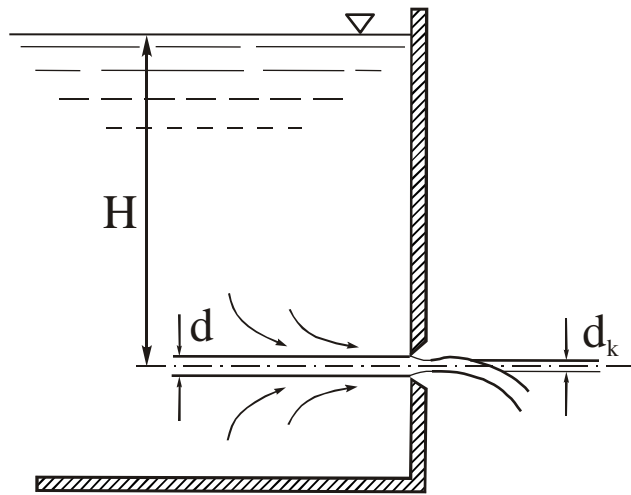
$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2$$

- ◉ **Toričelijev obrazac:** brzina kojom fluid ističe kroz mali otvor koji se nalazi na dubini H od slobodne površine tečnosti jednaka je brzini koju bi on imao pri slobodnom padu sa iste visine.
- ◉ Brzina kojom tečnost ističe kroz mali otvor određuje se Toričelijevim obrazacem

$$v = \sqrt{2gH}$$

- ◉ Stvarna brzina kojom tečnost ističe kroz mali otvor je uvek manja od one dobijene Toričelijevim obrascem, zato što je realna tečnost viskozna pa do izražaja dolazi trenje na ivicama otvora suda.

- Pri isticanju tečnosti kroz otvore sav gubitak energije odlazi na savlađivanje lokalnog otpora pri izlasku tečnost iz suda.
- Brzina isticanja kroz mali otvor



$$v = \varphi \sqrt{2gH}$$

brzinski koeficijent

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}}$$

- Protok tečnosti kroz mali otvor

$$Q = vA = \varphi \cdot A\sqrt{2gH}$$

- Eksperimentom je uočeno da se suženje mlaza javlja na izvesnom rastojanju od otvora, jer delići tečnosti ne mogu pri izlasku naglo ga promene pravac, pri čemu je

Koeficijent kontrakcije

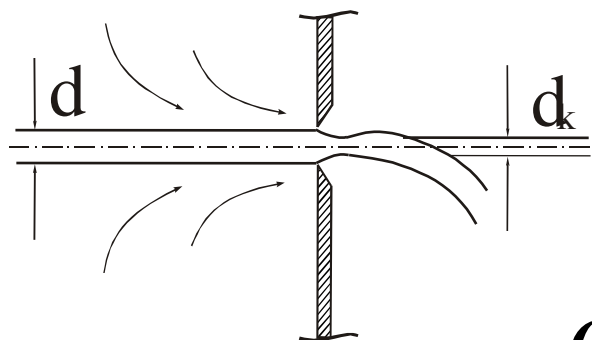
$$\psi = \frac{A_K}{A} = \frac{d_k^2}{d^2} = 0.64$$

Protok tečnosti kroz mali otvor

$$Q = \varphi \cdot \psi \cdot A\sqrt{2gH} = \mu \cdot A\sqrt{2gH}$$

$$\mu = \varphi \cdot \psi$$

-

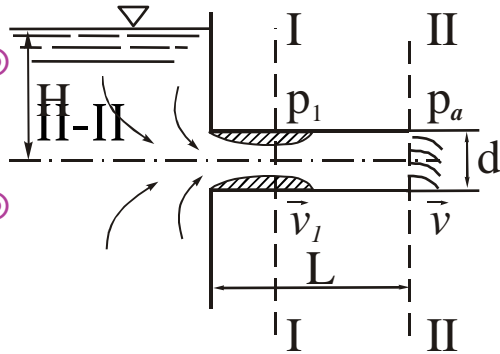


-

-

Koeficijent isticanja

- Za povećanje koeficijenta isticanja, odnosno, protoka i brzine isticanja koriste se posebni pribori koji se nazivaju naglavcima.
- **Venturijev naglavak** U pitanju je kratka cev kod koje je osenčena oblast zamenjena profilisanom cevi.



Bernulijeva jednačina za presek

$$\frac{p_a}{\gamma} + H = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + h_m$$

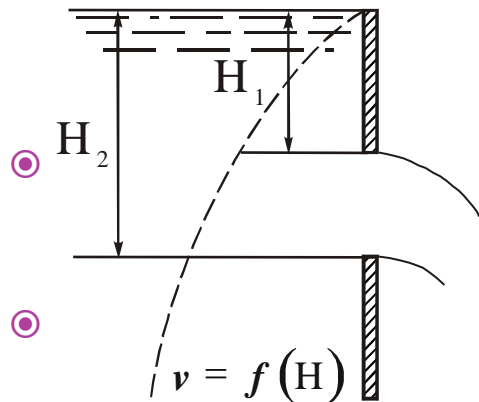
$$\psi^2 \frac{v_1^2}{2g} \Rightarrow h_m = \zeta \frac{v_1^2}{2g} = \frac{\zeta}{\psi^2} \frac{v^2}{2g}$$

Onda je

$$\frac{p_v}{\gamma} = \left(\varphi^2 \frac{1 + \zeta}{\psi^2} - 1 \right) H$$

- ◉ Isticanje kroz velike otvore

- ◉ Pretpostavlja se da je veliki otvor sastavljen od više malih otvora, tako da je elementarni protok kroz svaki mali otvor:



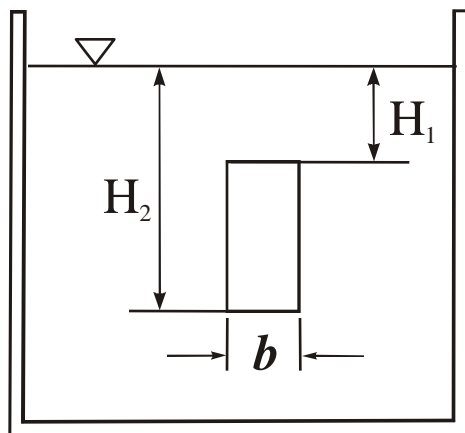
$$dQ = \mu a \sqrt{2gz} = \mu x(z) \sqrt{2gz} dz$$

gde je $a = x dz.$

Ukupni protok kroz veliki otvor je

$$Q = \mu \sqrt{2g} \int_{H_1}^{H_2} x(z) \sqrt{z} dz$$

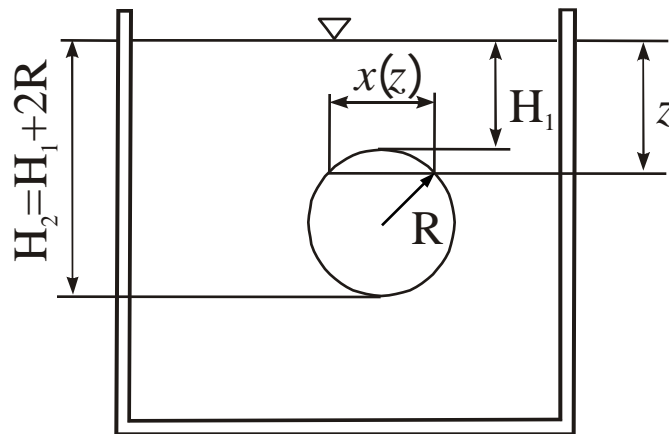
- U zavisnosti od oblika otvora menja se i funkcionalna zavisnost širine x od rastojanja z .
- Za pravougaoni otvor



$$x = b$$

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left(H_2^{\frac{3}{2}} - H_1^{\frac{3}{2}} \right)$$

- ⊙ Za kružni otvor



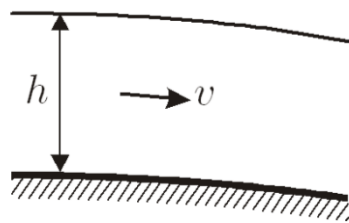
- ⊙ Ukupni protok kroz kružni otvor

$$Q = 2\mu\sqrt{2g} \int_{H_1}^{H_1+2R} \sqrt{z[R^2 - (H_1 + R - z)^2]} dz$$

TEČENJE U OTVORENIM TOKOVIMA

1. OSNOVNI POJMOVI

- U otvorenom toku oblast strujanja nije unapred definisana.
- Pri strujanju u otvorenom toku položaj slobodne površine nije unapred poznat.
- Fluid se u toku strujanja „popne” do dubine h (slika dole).
- To je dodatna teškoća pri izučavanju strujanja fluida u otvorenom toku.



Tečenje u otvorenom toku

•Kretanje fluida u otvorenom toku f-ja od sila koje se pri strujanju javljaju.

•Glavne sile koje određuju tečenje su:

a) sile težine i pritiska, koje predstavljaju osnovni faktor strujanja,

b) sile trenja, koje su posljedice viskoznosti fluida,

c) fiktivne inercijalne sile, koje su posljedice dejstva „pravih“ sila, a manifestuju se kroz promjenu v u vremenu i prostoru

•Ostale sile, (sile površinskog napona), \Rightarrow posljedice rotacije Zemlje.

•Ove sile se zanemaruju, osim kada je njihov uticaj značajan.

3

•Strujanje u otvorenom toku može biti:

• Strujanje sa dominantnim silama težine i p i silama trenja, (tečenje u kanalima i prirodnim vodotocima, rijekama i potocima).

•Ovi „objekti“ imaju veliku dužinu nazivaju se **dugački objekti**.

• Struje sa dominantnim silama težine i p i fiktivnim inercijalnim silama, (tečenje oko preliva i drugih objekata sa naglim promjenama čvrstih granica).

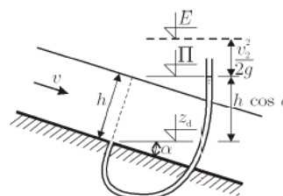
•Ovakva strujanja se javljaju u neposrednoj blizini objekata, koji utiču na tečenje, zbog čega se takvi objekti zovu **kratki objekti**.

•U otvorenom toku poprečni presjek se definiše sa dubinom vode, h .

•“ h ” bi zbog tog uslova morala biti normalna na strujnice.

•U tom slučaju pijezometarska kota, Π u odnosu na kotu dna, z_d , iznosi:

$$\Pi = z_d + h \cos \alpha, \quad (A)$$

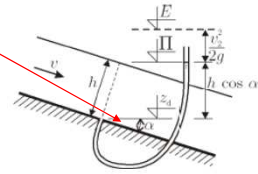


4

- Za uglove između apcise i dna toka ($\alpha < 11,5^\circ \Rightarrow \cos\alpha > 0,98 \Rightarrow$:

$$\Pi = z_d + h.$$

(B)



- J-na (B) = za sve dugačke objekte, kanale i rijeke
- J-na (A) = samo kada su podužni nagibi toka veoma veliki

• Na slobodnoj površini tečnosti: $p_{atm} = 0$

• Linija slobodne površine tečnosti = Π linija

• Pretpostavka: duž toka p_{atm} svugdje isti

• Ako p_{atm} nije svugdje isti \Rightarrow računamo sa različitim p_{atm}

• Pretpostavljamo: na slobodnoj površini tečnosti nema smičućih napona:

$$\tau = 0.$$

5

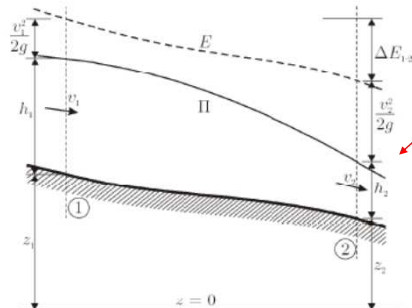
2. J-NA ODRŽANJA ENERGIJE (BERNOULLI-EVA J-NA)

• Pretpostavka: tečenje ustaljeno $\Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial t} = 0.$

• Ostvarenje pretpostavke:

- tečenje u otvorenom toku
- za jednu strujnicu između "1" i "2" važi j-na održanja energije
- j-na održanja energije (Bernoulli-eva j-na)

$$\frac{v_1^2}{2g} + h_1 + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + h_2 + z_2 + \Delta E_{1-2}.$$



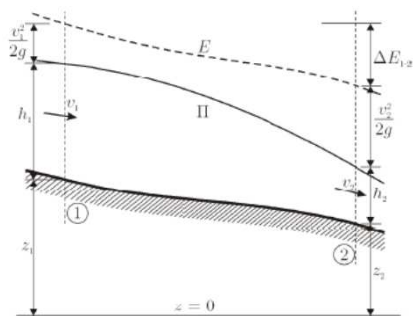
J-na "A"

Π i E linija duž otvorenog toka

6

•Sa slike:

- prikazane Π i E linija u otvorenom toku između presjeka "1" i "2"
- u j-ni "A" **potencijalna energija je po jedinici težine**
- član $p/\rho g$ zamjenjen je dubinom vode h
- z_i nije rastojanje od referentne ravni već **rastojanje do dna presjeka**



$$\frac{v_1^2}{2g} + h_1 + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + h_2 + z_2 + \Delta E_{1-2}$$

J-na "A"

7

3. JEDNOLIKO TEČENJE

•**Za ostvarenje jednolikog (uniformnog) tečenja potrebni su uslovi:**

- Q ustaljen ($\partial Q/\partial t = 0$).
- korito vodotoka prizmatično sa istom hrapavosti i istim dubinama
- pad dna korita const. ($\partial I_d/\partial x = 0$).
- nema lokalnih otpora

•**Za ispunjenje uslova:**

- korito vodotoka mora biti kanal (djelo čovjeka)
- pad Π , E i dna korita su **JEDNAKI**

$$I_d = I_\Pi = I_E.$$

8

$$Q = \frac{1}{n} A R^{2/3} I_H^{1/2}$$

Proticaj pri jednolikom tečenju u otvorenom toku definisan preko Shezy-Manningove j-ne

- Jednoliko tečenje \Rightarrow dubina vode u kanalu je **NORMALNA DUBINA h_n**
- **Kanal trougaonog poprečnog presjeka:**
 - h_n izračunava se direktno
- **Kanal trapeznog i pravougaonog poprečnog presjeka:**
 - h_n izračunava se iterativno
- **Uticaj R_e broja u otvorenim kanalima:**
 - veća hrapavost kanala nego u cijevima
 - zbog hrapavosti, R_e veći u kanalima nego u cijevima
 - veći R_e \Rightarrow tečenje u otvorenim kanalima skoro uvijek turbulentno

11